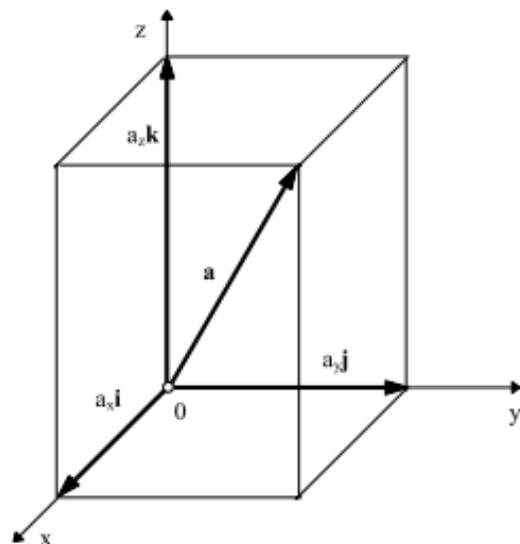


Przestrzenne układy sił

przykłady na podstawie:

Klasztorny M., Niezgoda T.,

Mechanika ogólna. Podstawy teoretyczne, zadania z rozwiązaniami,
Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2006 r.



. Składowe wektora w kartezjańskim układzie współrzędnych

(prawoskrętnym)

W układzie współrzędnych prostokątnych o osiach x , y , z i wersorach odpowiednio $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ dowolny wektor $\mathbf{a}$ można rozłożyć na trzy składowe: $a_x \mathbf{i}$, $a_y \mathbf{j}$, $a_z \mathbf{k}$ o kierunkach osi układu współrzędnych (rys. 2.5). Wektor $\mathbf{a}$ możemy zapisać analitycznie w postaci sumy trzech wektorów składowych (por. p. 2.2):

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

W powyższym wzorze a_x , a_y , a_z są współrzędnymi wektora równymi

rzutom wektora $\mathbf{a}$ na osie układu współrzędnych x , y , z . Jeżeli wektor $\mathbf{a}$ tworzy z osiami x , y , z odpowiednio kąty α , β , γ , to jego współrzędne (rzuty) zgodnie ze wzorem (2.2) wyrazimy następująco:

$$a_x = a \cos \alpha, \quad a_y = a \cos \beta, \quad a_z = a \cos \gamma.$$

Gdy znane są współrzędne wektora, to jego moduł określa wzór:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

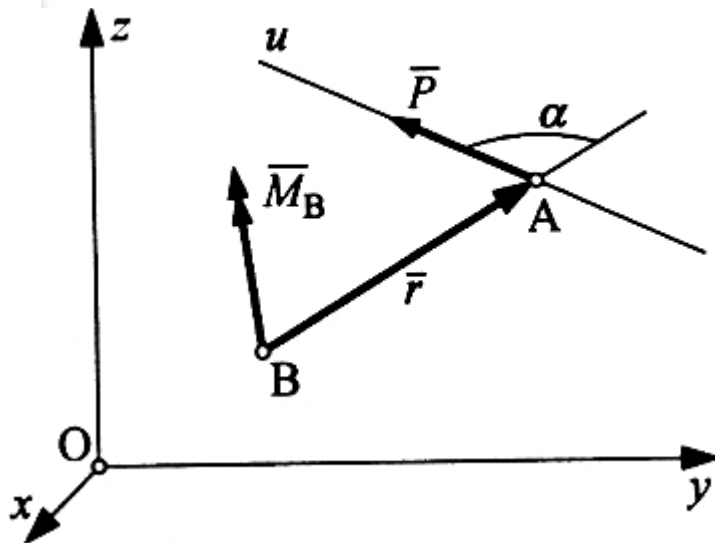
a kosinusy kątów, zwane *kosinusami kierunkowymi*, wyznaczonymi przez kierunki, jakie wektor $\mathbf{a}$ tworzy z osiami x , y , z , wyrażają zależności:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

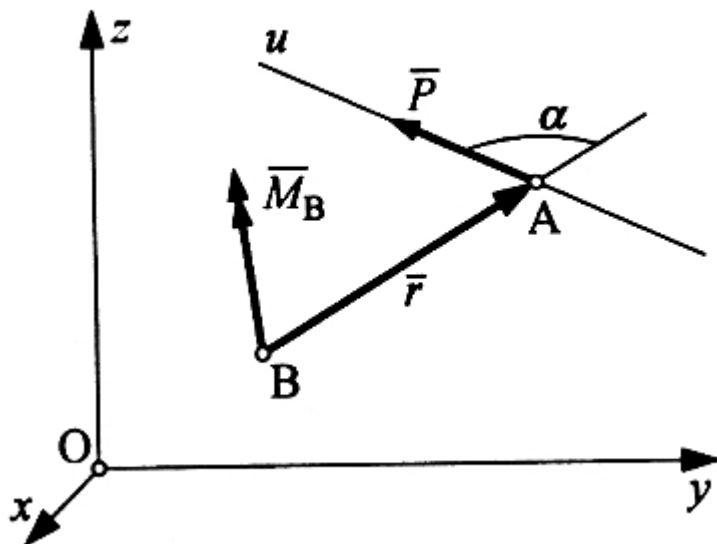
OBLICZENIA MOMENTU SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU I OSI W PRZESTRZENI

Moment siły względem punktu B jest iloczynem wektorowym

$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{P}$$



- jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\vec{r}$, $\vec{P}$,
- ma zwrot zgodny z regułą prawej dłoni,
- ma wartość równą polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{r}$, $\vec{P}$,
tzn. $M_B = rP \sin \alpha$, gdzie α – kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{P}$,
- jest wektorem zaczepionym w punkcie B,
- nie zależy od wyboru punktu A na prostej u.



zapis wyznacznikowy i zapis wersorowy (suma wektorów składowych)

$$\bar{M}_B = \bar{r} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = M_{Bx} \bar{e}_x + M_{By} \bar{e}_y + M_{Bz} \bar{e}_z$$

$$\left. \begin{aligned} M_{Bx} &= P_z r_y - P_y r_z \\ M_{By} &= P_x r_z - P_z r_x \\ M_{Bz} &= P_y r_x - P_x r_y \end{aligned} \right\}$$

$$M_B = \sqrt{M_{Bx}^2 + M_{By}^2 + M_{Bz}^2}$$

Przykład

Prosta działania siły $\bar{P}$ przechodzi przez punkt A. Obliczyć moment siły $\bar{P}$ względem punktu B.

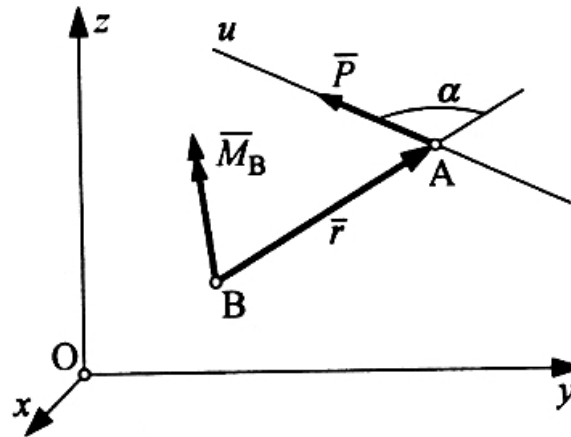
Dane:

a) $\bar{P} = 2\bar{e}_x + 3\bar{e}_y - 4\bar{e}_z$ [kN]

$A(-4, 1, 3), \quad B(1, -2, 4)$ [m]

b) $\bar{P} = -3\bar{e}_x + 5\bar{e}_z$ [kN]

$A(-2, -3, 0), \quad B(0, 5, 2)$ [m]



$$\text{a) } \bar{P} = 2\bar{e}_x + 3\bar{e}_y - 4\bar{e}_z \quad [\text{kN}]$$

$$A(-4, 1, 3), \quad B(1, -2, 4) \quad [\text{m}]$$

Ad a)

$$\bar{r} = \overrightarrow{BA} = r_x\bar{e}_x + r_y\bar{e}_y + r_z\bar{e}_z$$

$$r_x = x_A - x_B = -4 - 1 = -5 \text{ m}$$

$$r_y = y_A - y_B = 1 - (-2) = 3 \text{ m}$$

$$r_z = z_A - z_B = 3 - 4 = -1 \text{ m}$$

$$\bar{M}_B = \bar{r} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = M_{Bx}\bar{e}_x + M_{By}\bar{e}_y + M_{Bz}\bar{e}_z$$

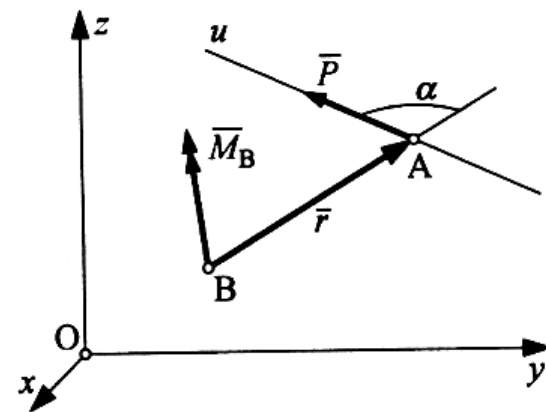
$$M_{Bx} = 3 \cdot (-4) - (-1) \cdot 3 = -12 + 3 = -9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{By} = -1 \cdot 2 - (-5) \cdot (-4) = -2 - 20 = -22 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{Bz} = -5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = -15 - 6 = -21 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_B = -9\bar{e}_x - 22\bar{e}_y - 21\bar{e}_z \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

$$M_B = \sqrt{(-9)^2 + (-22)^2 + (-21)^2} \approx 31,72 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



$$\text{b) } \bar{\mathbf{P}} = -3\bar{\mathbf{e}}_x + 5\bar{\mathbf{e}}_z \quad [\text{kN}]$$

$$\mathbf{A}(-2, -3, 0), \quad \mathbf{B}(0, 5, 2) \quad [\text{m}]$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{BA}} = r_x \bar{\mathbf{e}}_x + r_y \bar{\mathbf{e}}_y + r_z \bar{\mathbf{e}}_z$$

$$r_x = x_A - x_B = -2 \text{ m}$$

$$r_y = y_A - y_B = -3 - 5 = -8 \text{ m}$$

$$r_z = z_A - z_B = -2 \text{ m}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_B = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{P}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ -2 & -8 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = M_{Bx} \bar{\mathbf{e}}_x + M_{By} \bar{\mathbf{e}}_y + M_{Bz} \bar{\mathbf{e}}_z$$

$$M_{Bx} = -8 \cdot 5 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{By} = -2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 5 = 6 + 10 = 16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{Bz} = -(-8) \cdot (-3) = -24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_B = -40\bar{\mathbf{e}}_x + 16\bar{\mathbf{e}}_y - 24\bar{\mathbf{e}}_z \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

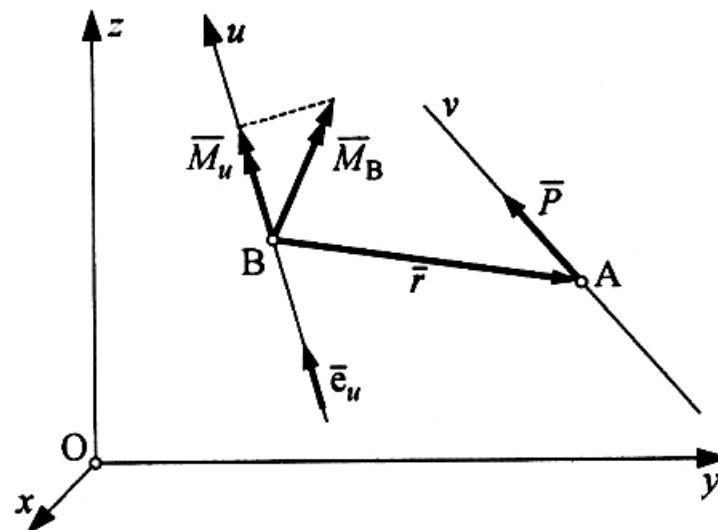
$$M_B = \sqrt{(-40)^2 + 16^2 + (-24)^2} \approx 49,32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Moment siły $\bar{P}$ względem dowolnej osi u jest równy rzutowi na oś u momentu siły $\bar{P}$ względem dowolnego punktu B na prostej u (rys. 1.42). Wynik nie zależy od wyboru punktu A na prostej działania siły $\bar{P}$, ani od wyboru punktu B na osi u .

Składowa momentu siły na oś u i wektor $\bar{M}_u$ wynoszą:

$$M_u = (\bar{r} \times \bar{P}) \cdot \bar{e}_u = \begin{vmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_u = M_u \bar{e}_u = (M_u e_{ux}) \bar{e}_x + (M_u e_{uy}) \bar{e}_y + (M_u e_{uz}) \bar{e}_z$$



Rys. 1.42

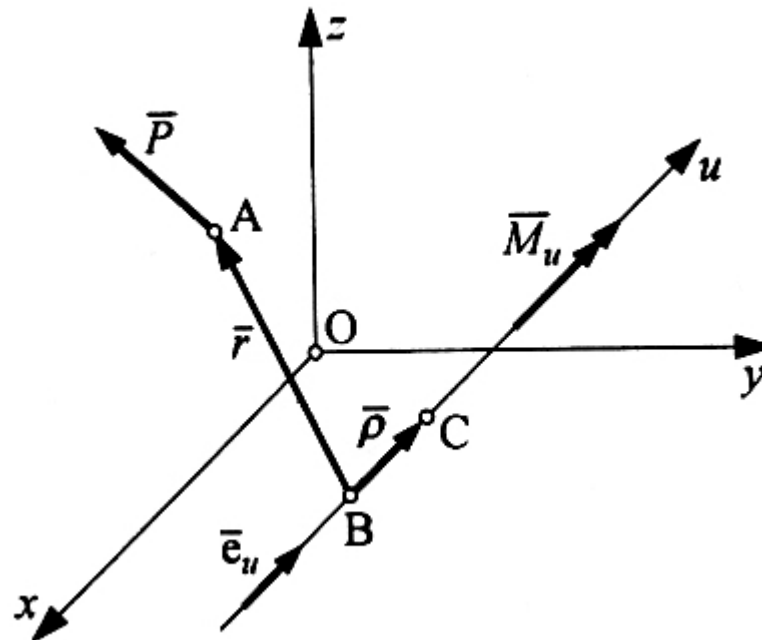
$$\bar{e}_u = e_{ux} \bar{e}_x + e_{uy} \bar{e}_y + e_{uz} \bar{e}_z \quad \text{jest wersorem osi } u.$$

Przykład

Prosta działania siły $\bar{P}$ przechodzi przez punkt A. Oś u przechodzi przez punkty B, C i ma zwrot zgodny ze zwrotem wektora $\overline{BC}$. Obliczyć moment siły $\bar{P}$ względem osi u .

Dane: $\bar{P} = 3\bar{e}_x + 4\bar{e}_z$ [kN]

$A(2, -1, 4)$, $B(6, 4, 0)$, $C(5, 5, 1)$ [m]



szukamy zapisu wersorowego osi u (kątów kierunkowych e_u) posługując się wektorem p

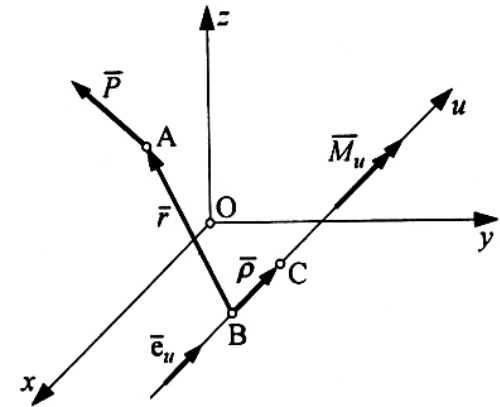
$$\bar{\rho} = \overline{BC} = \rho_x \bar{e}_x + \rho_y \bar{e}_y + \rho_z \bar{e}_z$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= x_C - x_B = 5 - 6 = -1 \text{ m} \\ \rho_y &= y_C - y_B = 5 - 4 = 1 \text{ m} \\ \rho_z &= z_C - z_B = 1 - 0 = 1 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ m}$$

$$\bar{e}_u = e_{ux} \bar{e}_x + e_{uy} \bar{e}_y + e_{uz} \bar{e}_z$$

$$e_{ux} = \frac{\rho_x}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{uy} = \frac{\rho_y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{uz} = \frac{\rho_z}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\bar{r} = \overline{BA} = r_x \bar{e}_x + r_y \bar{e}_y + r_z \bar{e}_z$$

$$r_x = x_A - x_B = 2 - 6 = -4 \text{ m}$$

$$r_y = y_A - y_B = -1 - 4 = -5 \text{ m}$$

$$r_z = z_A - z_B = 4 - 0 = 4 \text{ m}$$

składowa momentu M_B na oś u

$$M_u = \begin{vmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 M_u &= \begin{vmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} [(20 + 12 + 0) - (-15 + 0 - 16)] = \frac{63}{\sqrt{3}} \approx 36,37 \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{e}}_u &= e_{ux} \bar{\mathbf{e}}_x + e_{uy} \bar{\mathbf{e}}_y + e_{uz} \bar{\mathbf{e}}_z \\
 e_{ux} &= \frac{\rho_x}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{uy} = \frac{\rho_y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{uz} = \frac{\rho_z}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

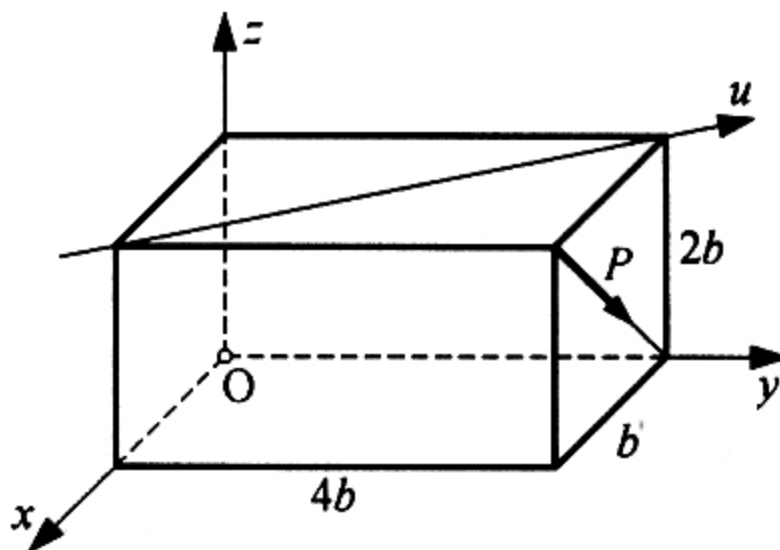
$$\begin{aligned}
 \bar{M}_u &= M_u \bar{\mathbf{e}}_u = (M_u e_{ux}) \bar{\mathbf{e}}_x + (M_u e_{uy}) \bar{\mathbf{e}}_y + (M_u e_{uz}) \bar{\mathbf{e}}_z = \\
 &= \frac{63}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \bar{\mathbf{e}}_x + \frac{63}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\mathbf{e}}_y + \frac{63}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\mathbf{e}}_z = -21 \bar{\mathbf{e}}_x + 21 \bar{\mathbf{e}}_y + 21 \bar{\mathbf{e}}_z \text{ [kN} \cdot \text{m]}
 \end{aligned}$$

Uwaga

Wynik nie zależy od wyboru punktów A, B, C na odpowiednich prostych.

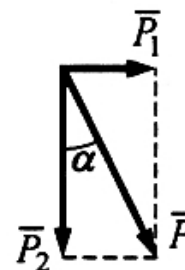
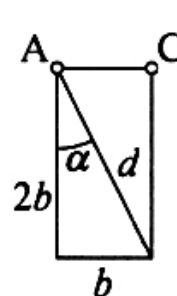
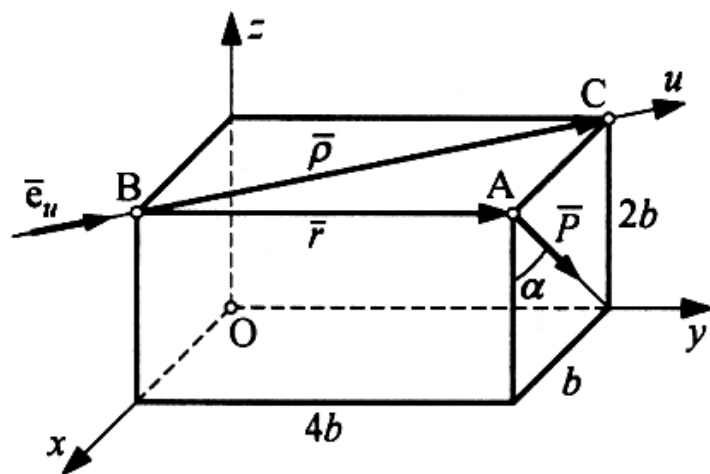
Przykład

Obliczyć moment siły P względem osi u :



Dane: P , b

Schemat obliczeniowy:

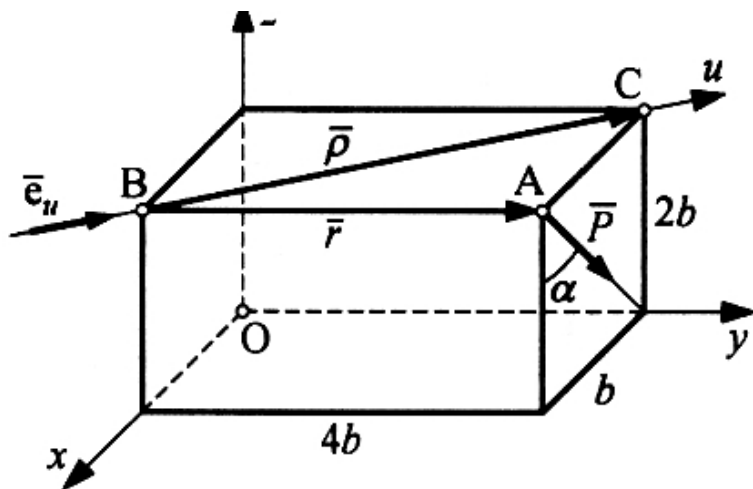


rozłożenie siły P na składowe

$$d = \sqrt{b^2 + (2b)^2} = \sqrt{5}b, \quad \sin \alpha = \frac{b}{d} = \frac{b}{\sqrt{5}b} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{2b}{d} = \frac{2b}{\sqrt{5}b} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$P_1 = P \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}P, \quad P_2 = P \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}P$$

$$P_x = -P_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}P, \quad P_y = 0, \quad P_z = -P_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}P$$



$$A(b, 4b, 2b), \quad B(b, 0, 2b), \quad C(0, 4b, 2b)$$

$$\bar{\rho} = \overline{BC} = \rho_x \bar{e}_x + \rho_y \bar{e}_y + \rho_z \bar{e}_z$$

szukamy zapisu wersorowego osi u (kątów kierunkowych e_u) na bazie wektora BC

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= x_C - x_B = 0 - b = -b \\ \rho_y &= y_C - y_B = 4b - 0 = 4b \\ \rho_z &= z_C - z_B = 2b - 2b = 0 \end{aligned} \right\} \rho = \sqrt{(-b)^2 + (4b)^2 + 0^2} = \sqrt{17}b$$

$$\bar{e}_u = e_{ux} \bar{e}_x + e_{uy} \bar{e}_y + e_{uz} \bar{e}_z$$

$$e_{ux} = \frac{\rho_x}{\rho} = \frac{-b}{\sqrt{17}b} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$e_{uy} = \frac{\rho_y}{\rho} = \frac{4b}{\sqrt{17}b} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$e_{uz} = \frac{\rho_z}{\rho} = 0$$

wektor (promień) działania siły P dla wybranego punktu

$$\bar{r} = \overline{BA} = r_x \bar{e}_x + r_y \bar{e}_y + r_z \bar{e}_z$$

$$r_x = x_A - x_B = b - b = 0$$

$$r_y = y_A - y_B = 4b - 0 = 4b$$

$$r_z = z_A - z_B = 2b - 2b = 0$$

składowe macierzy dane, można wyznaczyć składową momentu

$$\begin{aligned}
 M_u &= \begin{vmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & 4b & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}P & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}P \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 4b \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} P \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{4}{\sqrt{85}} Pb \cdot [(2 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0)] = \frac{8}{\sqrt{85}} = \frac{8}{\sqrt{17 \cdot 5}} Pb
 \end{aligned}$$

Uwaga

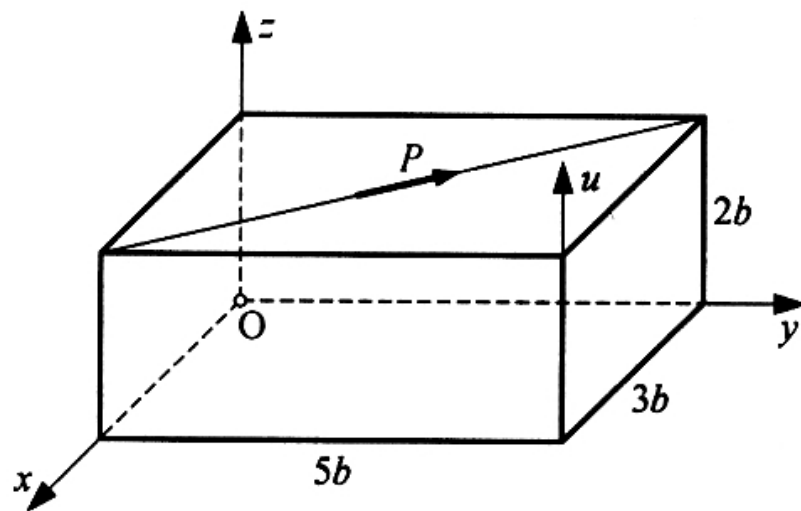
W niektórych zadaniach może być $M_u < 0$, gdyż M_u jest składową, a nie modulem.

wektor momentu M_u

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{M}}_u &= M_u \bar{\mathbf{e}}_u = M_u (e_{ux} \bar{\mathbf{e}}_x + e_{uy} \bar{\mathbf{e}}_y + e_{uz} \bar{\mathbf{e}}_z) = \\
 &= \frac{8}{\sqrt{17 \cdot 5}} Pb \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} \bar{\mathbf{e}}_x + \frac{4}{\sqrt{17}} \bar{\mathbf{e}}_y \right) = -\frac{8}{17\sqrt{5}} Pb \bar{\mathbf{e}}_x + \frac{32}{17\sqrt{5}} Pb \bar{\mathbf{e}}_y
 \end{aligned}$$

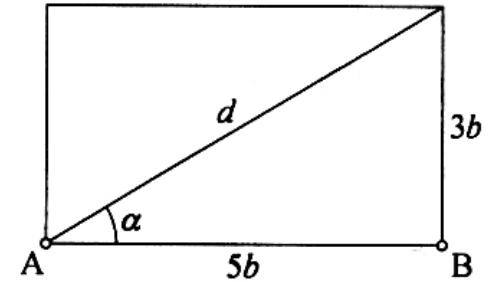
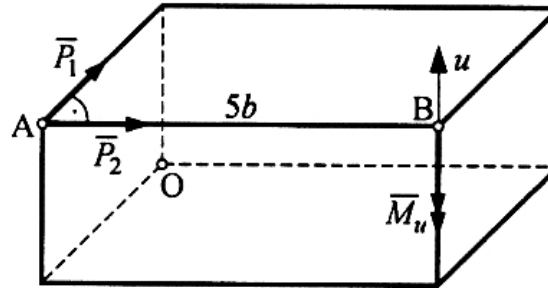
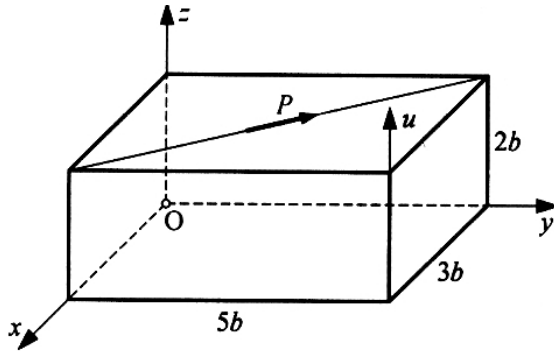
Przykład

Obliczyć moment siły $\bar{P}$ względem osi u :



Dane: P, b

Zadanie można rozwiązać, korzystając z twierdzenia o obliczaniu momentu względem osi. Schemat obliczeniowy ma postać:



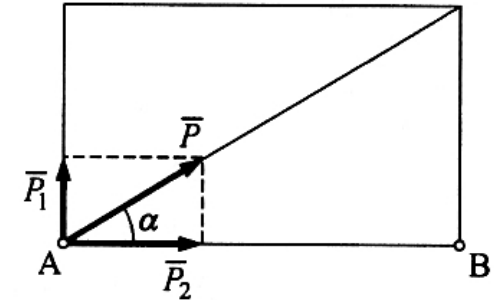
$$d = \sqrt{(5b)^2 + (3b)^2} = \sqrt{34}b$$

$$\sin \alpha = \frac{3b}{d} = \frac{3b}{\sqrt{34}b} = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad P_1 = P \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}P$$

składowa momentu

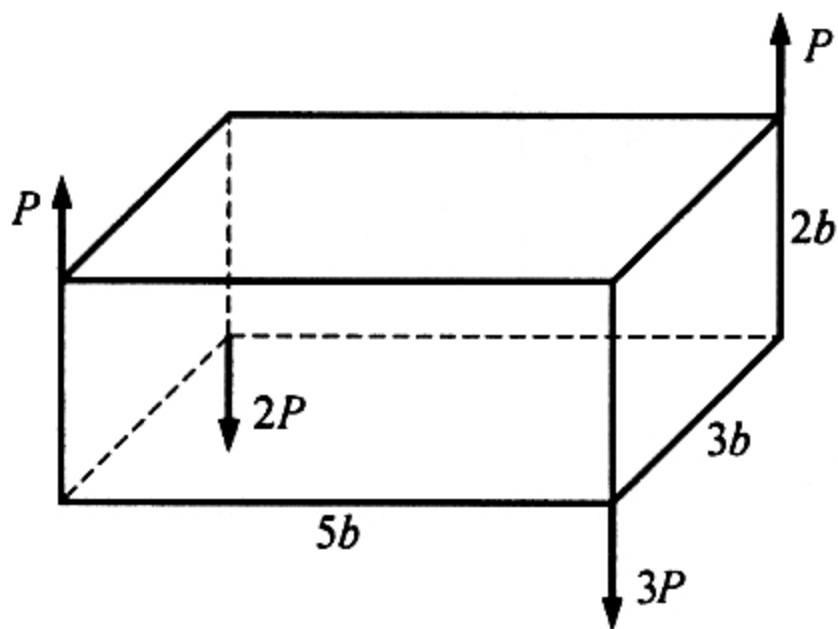
$$M_u(\bar{P}) = M_B(\bar{P}_1) = -P_1 \cdot 5b = -\frac{3}{\sqrt{34}}P \cdot 5b = -\frac{15}{\sqrt{34}}Pb$$

$$\bar{M}_u = M_u \bar{e}_u = M_u \bar{e}_z = -\frac{15}{\sqrt{34}}Pb \bar{e}_z, \quad |\bar{M}_u| = \frac{15}{\sqrt{34}}Pb$$



Przykład

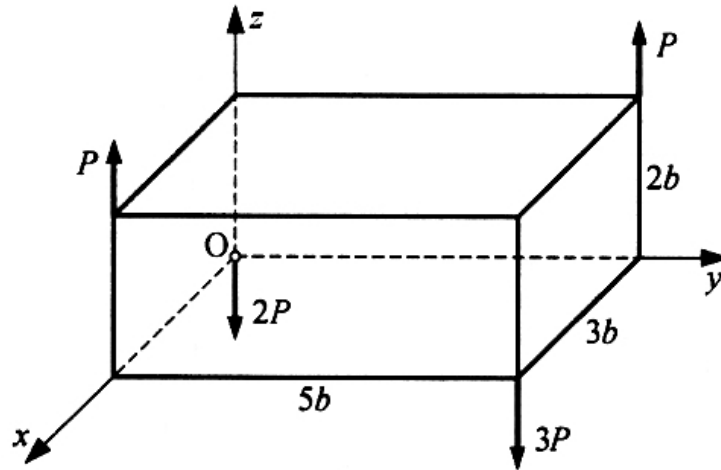
Zredukować przestrzenny układ sił.



Dane: $P = 1000 \text{ N}$
 $b = 0,2 \text{ m}$

Układ sił redukujemy do wybranego dowolnie początku układu współrzędnych O

Schemat obliczeniowy



siła ogólna S_o

$$\bar{S} = S_z \bar{e}_z, \quad S_z = P + P - 2P - 3P = -3P = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

Moment
ogólny M_o

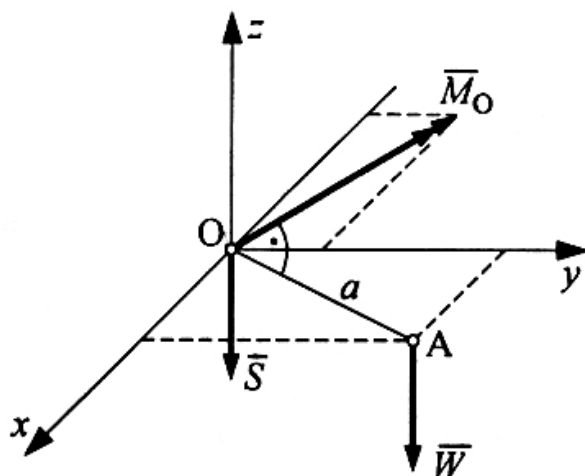
$$\bar{M}_O = M_x \bar{e}_x + M_y \bar{e}_y$$

$$M_x = P \cdot 5b - 3P \cdot 5b = -10Pb, \quad M_y = -P \cdot 3b + 3P \cdot 3b = 6Pb$$

$$M_O = \sqrt{(-10Pb)^2 + (6Pb)^2} = \sqrt{136}Pb, \quad S = 3P$$

ponieważ siły są równoległe (pamiętajmy też o przypadku zbieżnego układu sił)

Układ redukuje się do wypadkowej $\bar{W} = \bar{S} = -3000\bar{e}_z$ [N]. Prosta działania wypadkowej wyznaczamy ze schematu:



$$M_O = Wa = Sa \Rightarrow a = \frac{M_O}{S} = \frac{\sqrt{136}Pb}{3P} \approx 3,89b = 3,89 \cdot 0,2 = 0,778 \text{ m}$$

Wyróżnik przestrzennego układu obciążeń

$$w = \bar{S} \cdot \bar{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z$$

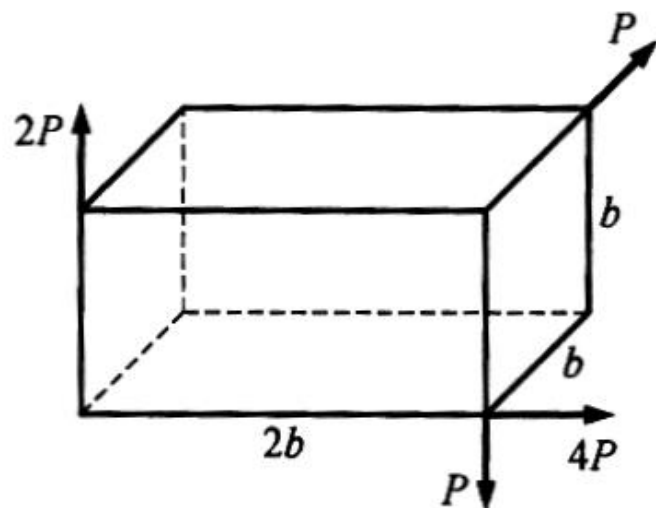
Wyróżnik jest niezmiennikiem układu, tzn. jego wartość nie zależy od wyboru bieguna redukcji.

Jeśli wyróżnik układu jest równy zero, to można wyznaczyć taki biegun redukcji A, że układ redukuje się tylko do siły ogólnej zwanej wypadkową,

$$w = 0 \Rightarrow \bar{S} \perp \bar{M}_O \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \bar{W}, A \quad (A \neq O)$$

Przykład

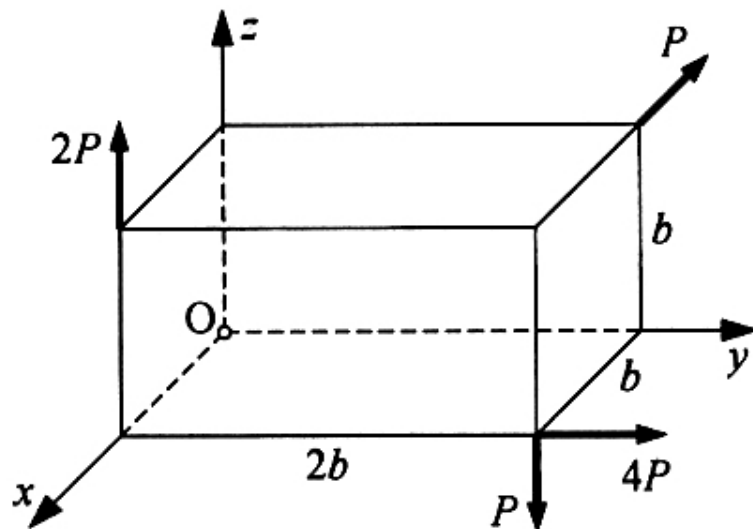
Zredukować przestrzenny układ sił. Proste działania sił pokrywają się z wybranymi krawędziami prostopadłościanu.



Dane: P, b

Przyjmujemy układ współrzędnych i wykonujemy redukcję wstępną do punktu 0

sposób „inżynierski”



$$\bar{S} = S_x \bar{e}_x + S_y \bar{e}_y + S_z \bar{e}_z$$

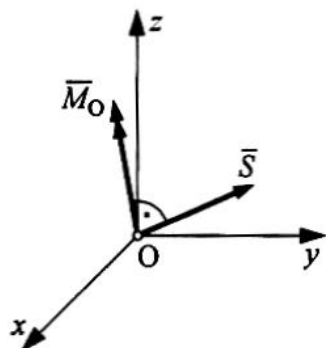
$$S_x = -P, \quad S_y = 4P, \quad S_z = 2P - P = P$$

$$\bar{M}_O = M_x \bar{e}_x + M_y \bar{e}_y + M_z \bar{e}_z$$

$$M_x = -P \cdot 2b = -2Pb$$

$$M_y = P \cdot b - 2P \cdot b - P \cdot b = -2Pb$$

$$M_z = 4P \cdot b + P \cdot 2b = 6Pb$$



dodatkowo

$$w = \bar{S} \cdot \bar{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z = -P \cdot (-2Pb) + 4P \cdot (-2Pb) + P \cdot 6Pb = 0$$

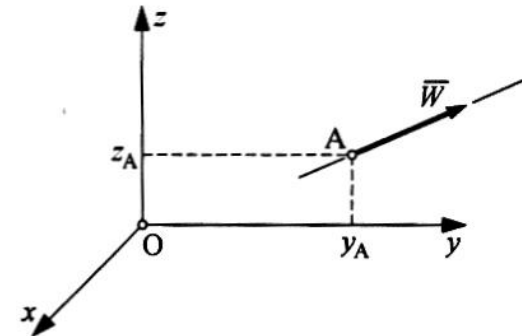
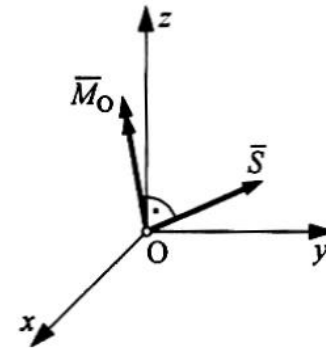
Wniosek: Układ redukuje się do wypadkowej $\bar{W} = \bar{S} = -P\bar{e}_x + 4P\bar{e}_y + P\bar{e}_z$.

Wyznaczenie punktu lokacyjnego A prostej działania wypadkowej:

$$\bar{r} = \overrightarrow{OA} = x_A \bar{e}_x + y_A \bar{e}_y + z_A \bar{e}_z$$

$$\bar{r} \times \bar{S} = \bar{M}_O$$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} = M_x \bar{e}_x + M_y \bar{e}_y + M_z \bar{e}_z$$



$$\begin{cases} S_z y_A - S_y z_A = M_x \\ S_x z_A - S_z x_A = M_y \\ S_y x_A - S_x y_A = M_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P y_A - 4 P z_A = -2 P b & | : P \\ -P z_A - P x_A = -2 P b & | : (-P) \\ -4 P x_A - (-P) y_A = 6 P b & | : P \end{cases}$$

(nieskończenie wiele rozwiązań – punkty na prostej)

$$\begin{cases} y_A - 4z_A = -2b \\ z_A + x_A = 2b \\ -4x_A + y_A = 6b \end{cases}$$

Jest to nieoznaczony układ równań.

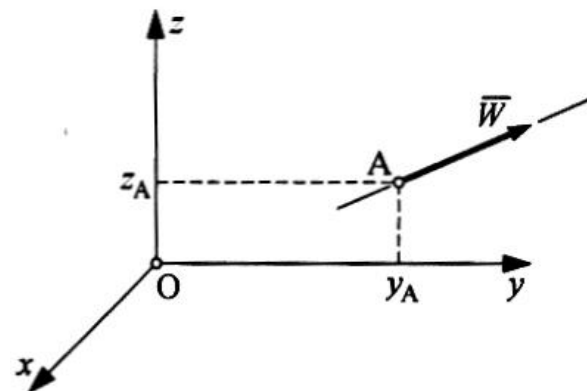
Jedno z możliwych rozwiązań układu:

(możemy założyć dowolną wartość dla x_A, y_A, z_A , najłatwiej 0)

$$\left. \begin{array}{l} x_A = 0 \\ (2) \Rightarrow z_A = 2b \\ (3) \Rightarrow y_A = 6b \end{array} \right\} A(0, 6b, 2b)$$

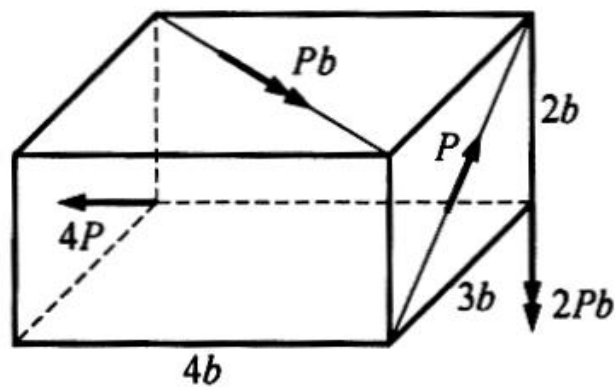
Sprawdzenie równania (1):

$$\mathcal{Q} = 6b - 4 \cdot 2b = -2b, \quad \mathcal{P} = -2b, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{P}$$



Przykład

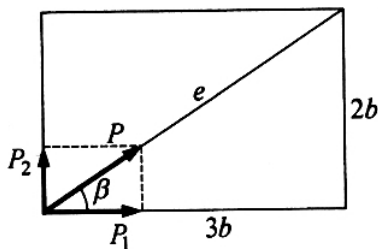
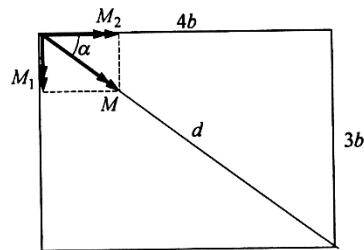
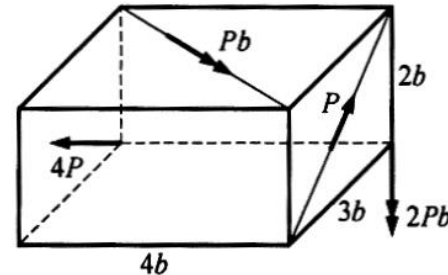
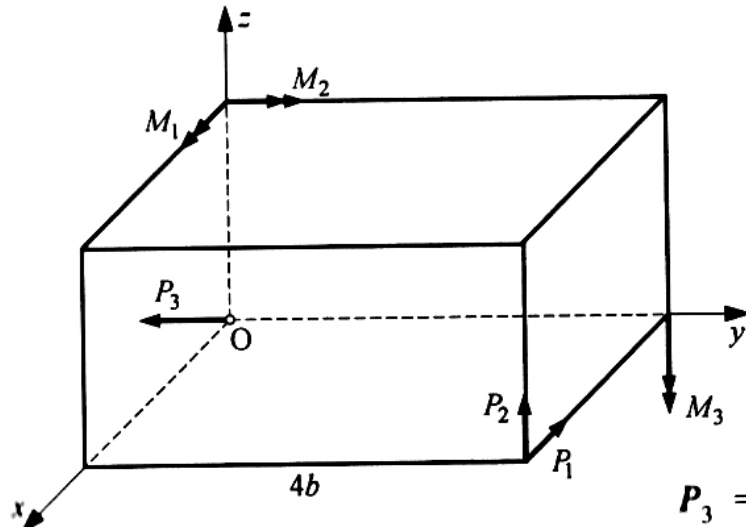
Zredukować przestrzenny układ obciążeń:



Dane: P, b

Wektory sił i momentów działają wzdłuż krawędzi lub przekątnych prostopadłościanu. Siłę P i moment $M = Pb$ rozkładamy na rzuty równoległe do osi x, y, z .

Schemat obliczeniowy



$$P_3 = 4P, \quad M_3 = 2Pb$$

$$d^2 = (4b)^2 + (3b)^2 = 25b^2 \Rightarrow d = 5b$$

$$\sin \alpha = \frac{3b}{d} = \frac{3b}{5b} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \cos \alpha = \frac{4b}{d} = \frac{4b}{5b} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$M_1 = M \cos \alpha = 0,6Pb, \quad M_2 = M \sin \alpha = 0,8Pb$$

$$e^2 = (3b)^2 + (2b)^2 = 13b^2 \Rightarrow e = \sqrt{13}b$$

$$\sin \beta = \frac{2b}{e} = \frac{2b}{\sqrt{13}b} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos \beta = \frac{3b}{e} = \frac{3b}{\sqrt{13}b} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$P_1 = P \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}P, \quad P_2 = P \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}}P$$

redukcja wstępna do punktu O:

sposób „inżynierski”

$$\bar{S} = S_x \bar{e}_x + S_y \bar{e}_y + S_z \bar{e}_z$$

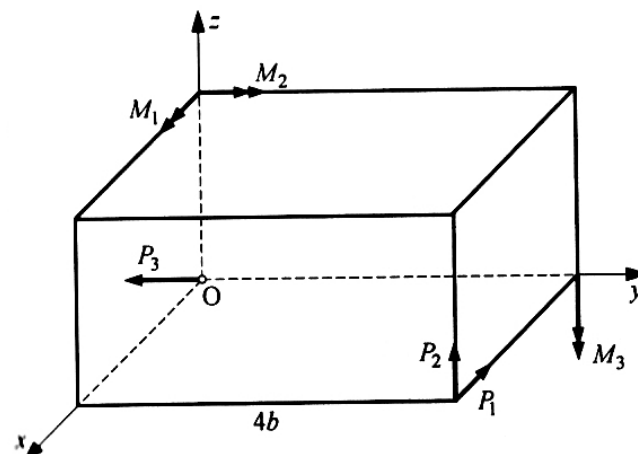
$$S_x = -P_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}}P \approx -0,8321P, \quad S_y = -P_3 = -4P, \quad S_z = P_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}P \approx 0,5547P$$

$$\bar{M}_O = M_x \bar{e}_x + M_y \bar{e}_y + M_z \bar{e}_z$$

$$M_x = P_2 \cdot 4b + M_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}P \cdot 4b + 0,6Pb \approx 2,8188Pb$$

$$M_y = -P_2 \cdot 3b + M_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}}P \cdot 3b + 0,8Pb \approx -0,8641Pb$$

$$M_z = P_1 \cdot 4b - M_3 = \frac{3}{\sqrt{13}}P \cdot 4b - 2Pb \approx 1,3282Pb$$

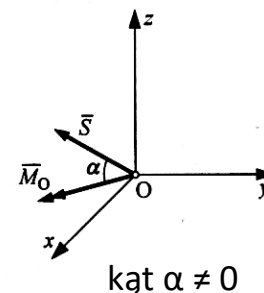


dodatkowo wyróżnik układu

$$\begin{aligned} w &= \bar{S} \cdot \bar{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z = \\ &= -0,8321P \cdot 2,8188Pb - 4P \cdot (-0,8641Pb) + 0,5547P \cdot 1,3282Pb \approx \\ &\approx 1,8476P^2b \neq 0 \end{aligned}$$

Wniosek: Układ redukuje się do skrętnika $(\bar{S}, \bar{M}_A)$.

Ilustracja wyniku redukcji:



Twierdzenia

1. Jeśli wyróżnik układu jest równy zeru, to można wyznaczyć taki biegun redukcji A, że układ redukuje się tylko do siły ogólnej zwanej wypadkową, co zapisujemy (rys. 1.47):

$$w = 0 \implies \bar{S} \perp \bar{M}_O \implies \alpha = 90^\circ \implies \bar{W}, A \quad (A \neq O) \quad (1.75)$$

2. Jeśli wyróżnik układu jest różny od zera, to można wyznaczyć taki biegun redukcji A, że układ redukuje się do skrętnika (siła ogólna i moment ogólny są kolinearne), co zapisujemy:

$$w \neq 0 \implies \bar{S} \not\perp \bar{M}_O \implies \alpha \neq 90^\circ \implies \bar{S}, \bar{M}_A, A \quad (A \neq O, \bar{S} \parallel \bar{M}_A) \quad (1.76)$$

3. Jeśli $\bar{S} \neq \bar{0}$, $\bar{M}_O = \bar{0}$, to układ redukuje się do wypadkowej w punkcie O, co zapisujemy:

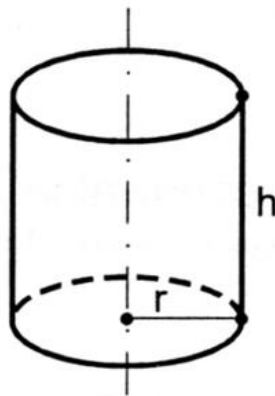
$$\bar{S} \neq \bar{0}, \quad \bar{M}_O = \bar{0} \implies \bar{W}, A \quad (A = O) \quad (1.77)$$

4. Jeśli $\bar{S} = \bar{0}$, $\bar{M}_O \neq \bar{0}$, to układ redukuje się do pary sił o memencie $\bar{M} = \bar{M}_O$, co zapisujemy:

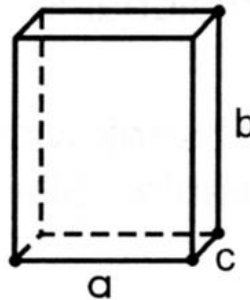
$$\bar{S} = \bar{0}, \quad \bar{M}_O \neq \bar{0} \implies \bar{M} \quad (1.78)$$

Pojęcia podstawowe w mechanice punktów materialnych i ciał sztywnych

- *Punktem materialnym* nazywamy obiekt o zerowych wymiarach i skończonej masie.
 - *Ciałem sztywnym* nazywamy zbiór punktów materialnych o stałych odległościach między nimi.
 - Typy ciał sztywnych: bryła, tarcza, pręt
- Przykłady:

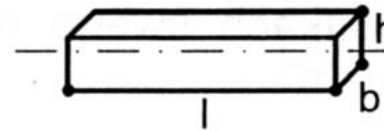


walec
(bryła)



prostokąt
(tarcza)

$$c \leq \frac{a}{10}, \quad c \leq \frac{b}{10}$$



pręt

$$b \leq \frac{l}{10}, \quad h \leq \frac{l}{10}$$

- *Liczbą stopni swobody* punktu materialnego lub ciała sztywnego nazywamy liczbę n niezależnych przemieszczeń opisujących ruch punktu lub ciała.

punkt na płaszczyźnie: $n = 2$

punkt w przestrzeni: $n = 3$

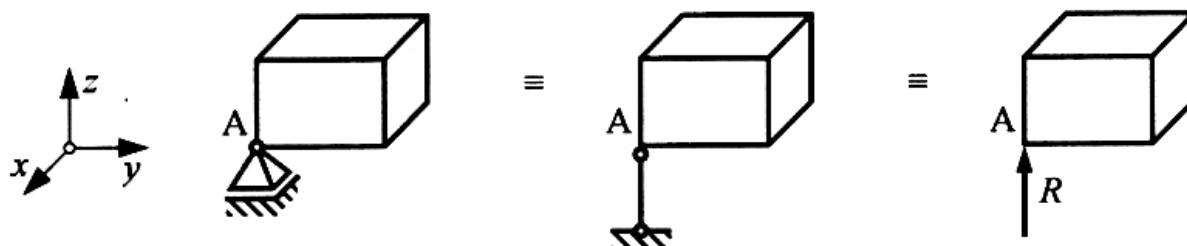
tarcza lub pręt na płaszczyźnie: $n = 3$

bryła w przestrzeni: $n = 6$

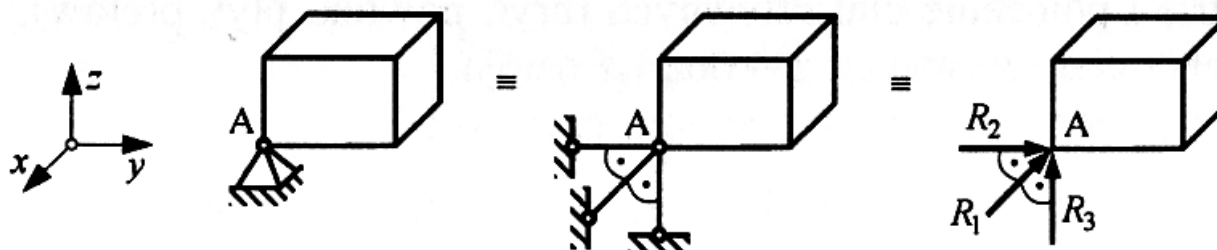
2 x przemieszczenie + 1 x obrót

3 x przemieszczenie + 3 x obrót

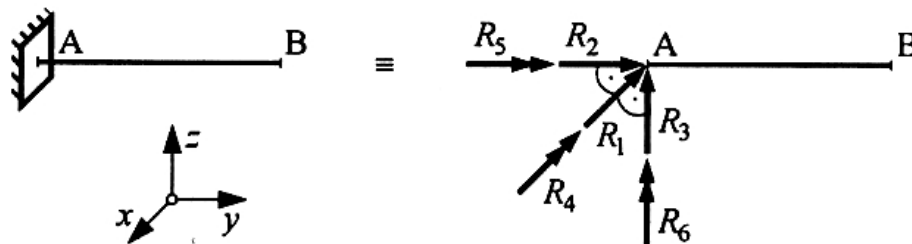
Podpora przegubowa, przesuwna w wybranej płaszczyźnie



Podpora przegubowa



Podpora sztywna (sztywne zamocowanie)



Twierdzenie (GN układów przestrzennych)

Niech e oznacza liczbę więzów elementarnych modelujących połączenia ciał sztywnych ze sobą i z ostoją, a t – liczbę ciał sztywnych układu (bez ostoji).

1. Jeśli $e = 6t$, to spełniony jest warunek konieczny układu geometrycznie niezmiennego (GN).
2. Jeśli $e > 6t$, to spełniony jest warunek konieczny układu geometrycznie niezmiennego przesztynionego (GN).
3. Jeśli $e < 6t$, to spełniony jest warunek dostateczny układu geometrycznie zmiennego (GZ).

Twierdzenie (SW układów przestrzennych)

Niech e oznacza liczbę niewiadomych reakcji (liczba więzów elementarnych), a $6t$ – liczbę równań równowagi statycznej (po 6 równań dla każdego ciała sztywnego).

1. Jeśli $e = 6t$ i układ jest geometrycznie niezmienny (GN), to jest on statycznie wyznaczalny (SW).
2. Jeśli $e > 6t$ i układ jest geometrycznie niezmienny (GN), to jest on statycznie niewyznaczalny (SN).

Wielkość $n_h = e - 6t$ nazywa się stopniem statycznej niewyznaczalności.

3. Jeśli $e < 6t$, to układ jest geometrycznie zmienny (GZ).

Wielkość $n_g = 6t - e$ nazywa się stopniem geometrycznej zmienności.

Przestrzenny dowolny układ obciążeń jest w równowadze, jeśli $\bar{S} = \bar{0}$, $\bar{M}_O = \bar{0}$, tzn.

$$S_x = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0$$

$$S_y = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0$$

$$S_z = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

$$M_x = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (P_{iz} y_{A_i} - P_{iy} z_{A_i}) + \sum_{j=1}^m M_{jx} = 0$$

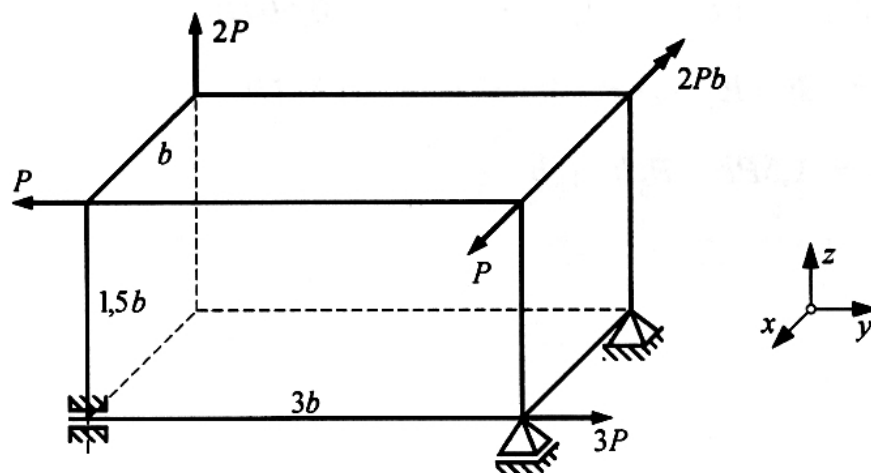
$$M_y = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (P_{ix} z_{A_i} - P_{iz} x_{A_i}) + \sum_{j=1}^m M_{jy} = 0$$

$$M_z = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (P_{iy} x_{A_i} - P_{ix} y_{A_i}) + \sum_{j=1}^m M_{jz} = 0$$

W praktyce stosujemy zapis symboliczny sześciu równań równowagi statycznej (6RRS):

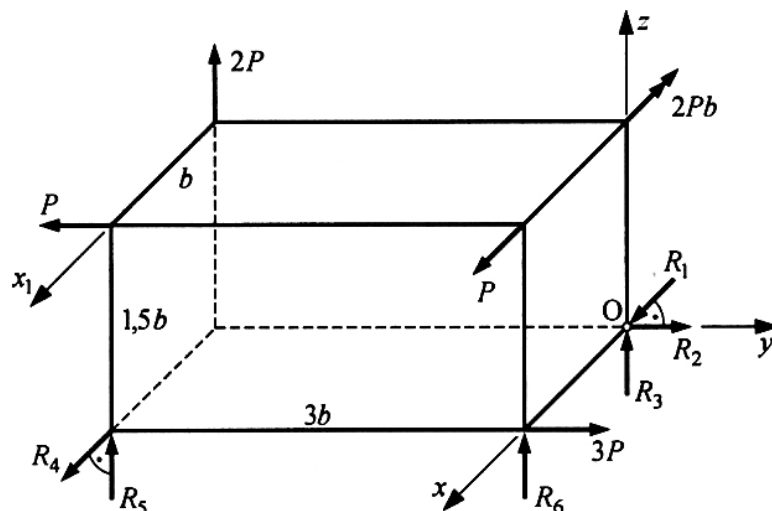
$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

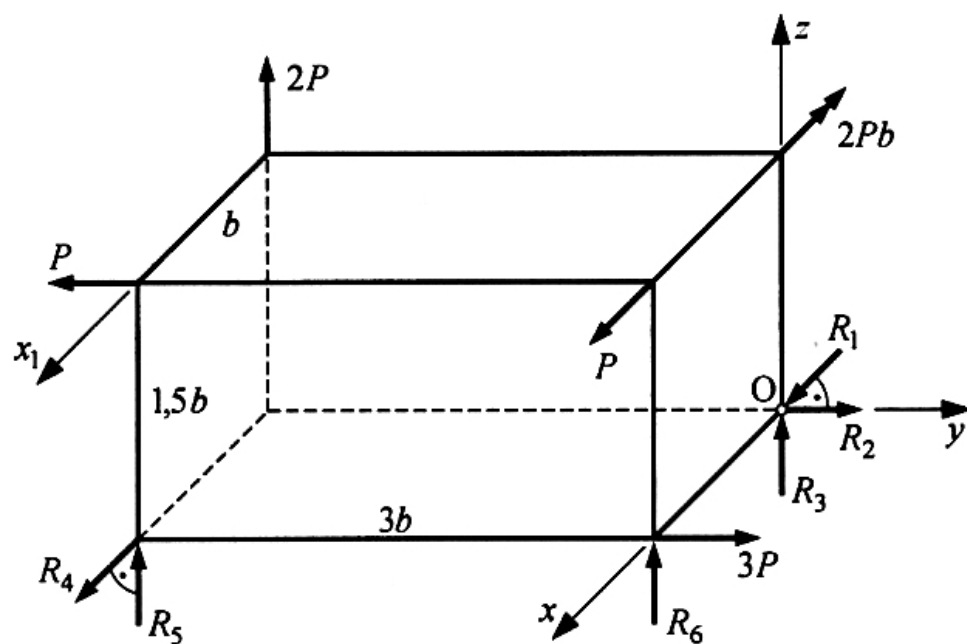
Wyznaczyć reakcje na podporach prostopadłościanu. Wektory obciążeń czynnych pokrywają się z krawędziami prostopadłościanu.



Rozwiązanie

Podpory zastępujemy reakcjami, zakładając zwroty reakcji. Początek układu xyz przyjmujemy w jednym z punktów podparcia. Schemat obliczeniowy ma postać:





6RRS:

$$\sum X = 0: \quad R_1 + R_4 + P = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0: \quad R_2 - P + 3P = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z = 0: \quad R_3 + R_5 + R_6 + 2P = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_x = 0: \quad -R_5 \cdot 3b + P \cdot 1.5b - 2P \cdot 3b - 2Pb = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0: \quad -R_5 \cdot b - R_6 \cdot b + P \cdot 1.5b = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0: \quad R_4 \cdot 3b - P \cdot b + 3P \cdot b = 0 \quad (6)$$

$$(2) \Rightarrow R_2 = -2P$$

$$(4) \Rightarrow 3R_5b = -6,5Pb \quad | : (3b) \Rightarrow R_5 \approx -2,167P$$

$$(6) \Rightarrow 3R_4b = -2Pb \quad | : (3b) \Rightarrow R_4 \approx -0,667P$$

$$(1) \Rightarrow R_1 = -P - R_4 = -P + 0,667P = -0,333P$$

$$(5) \Rightarrow R_6b = 1,5Pb - R_5b \quad | : b$$

$$R_6 = 1,5P - R_5 = 1,5P - (-2,167P) = 3,667P$$

$$(3) \Rightarrow R_3 = -2P - R_5 - R_6 = -2P - (-2,167P) - 3,667P = -3,500P = -3,5P$$

$$\text{Odp.: } R_1 = 0,333P, \quad R_2 = -2P, \quad R_3 = -3,5P,$$

$$R_4 = -0,667P, \quad R_5 = -2,167P, \quad R_6 = 3,667P.$$

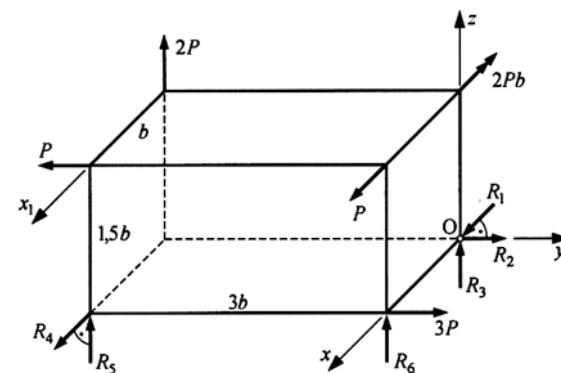
Interpretacja: Trafny okazał się tylko zwrot reakcji R_6 .

Równanie kontrolne:

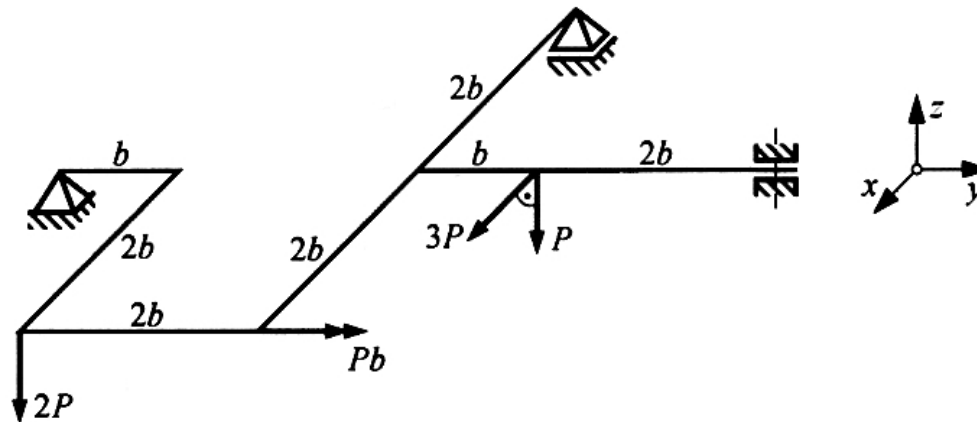
$$\sum M_{x_1} = 0: \quad \text{obliczenie momentu względem dowolnego punktu lub osi}$$

$$\begin{aligned} & R_2 \cdot 1,5b + R_3 \cdot 3b + R_6 \cdot 3b - 2Pb + 3P \cdot 1,5b = \\ & = -2P \cdot 1,5b + (-3,5P) \cdot 3b + (3,667P) \cdot 3b - 2Pb + 4,5Pb = \\ & = (-3 - 10,5 + 11,001 - 2 + 4,5)Pb = (15,001 - 15)Pb = 0,001Pb \approx 0 \end{aligned}$$

Wartość 0,001 wynika z zaokrągleń do trzech cyfr po przecinku. Uznajemy, że równanie kontrolne jest spełnione.



Poziomy układ prętowy (w płaszczyźnie xy) jest obciążony trzema siłami i momentem. Wyznaczyć reakcje na podporach.



Początek układu xyz przyjęto na podporze przegubowej. Schemat obliczeniowy ma postać:

